Влияние линейного сопротивления на вынужденные колебания

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его интегрирование. Для выяснения влияния линейного сопротивления на вынужденные колебания рассмотрим наиболее общий случай, когда обобщенная сила Q состоит из трех сил: потенциальной $Q^{П}=-\partial П/\partial q=-cq$, линейного сопротивления $Q^{(Ф)}=-\partial Ф/\partial\dot q=-\mu\dot q$ и гармонической возмущающей $Q^{B}=H\sin(pt+\delta)$.

Подставляя это значение обобщенной силы $Q=Q^{П}+Q^{Ф}+Q^{B}$ в уравнение Лагранжа (1), получаем

$$a\ddot q+\mu\dot q+cq=H\sin(pt+\delta).$$

Разделим обе части уравнения на a и введем обозначения $k^2=c/a$, $2n=\mu/a$, $h=H/a$. Здесь k — круговая частота собственных колебаний; n — коэффициент затухания и h — относительная амплитуда возмущающей силы.

Дифференциальное уравнение в окончательной форме

$$\ddot q+2n\dot q+k^2q=h\sin(pt+\delta). \qquad (44)$$

Получено линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вынужденных колебаний с учетом линейного сопротивления.

Так как оно является неоднородным уравнением, то его решение состоит из двух частей: q_1 — общего решения однородного уравнения, q_2 — частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения удовлетворяет уравнению собственных колебаний при линейном сопротивлении, поэтому его называют *собственным движением* или даже собственными колебаниями, хотя это движение может и не быть колебательным.

Частное решение неоднородного уравнения q_2 называют *вынужденным колебанием*. Общее движение системы характеризуется обобщенной координатой q, которая равна сумме q_1 и q_2, т. е. $q=q_1+q_2$. Величину q называют *общим вынужденным движением* (или *вынужденным колебанием*).

Общее решение q_1 однородного дифференциального уравнения $\ddot q_1+2n\dot q_1+k^2q_1=0$ в зависимости от соотношения между величинами n и k выражается в одной из трех форм:

$$n<k,\ q_1=A_1e^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\alpha_1\right),$$
$$n=k,\ q_1=e^{-nt}(C_1t+C_2);$$
$$n>k,\ q_1=e^{-nt}\left(C_1e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t}+C_2e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}\right).$$

Известно, что в любом из этих случаев из-за наличия множителя e^{-nt} q_1 стремится к нулю с возрастанием времени, т. е. затухает. При малых значениях коэффициента затухания $(n<k)$ затухающее движение q_1 носит колебательный характер, а при больших $(n\geqslant k)$ затухание так велико, что движение не является колебательным. Следовательно, при наличии линейного сопротивления по истечении достаточного времени общее вынужденное движение q несущественно отличается от вынужденных колебаний и можно считать, что $q=q_2$.

Частное решение q_2 уравнения (44) следует искать в форме $q_2=A\sin(pt+\delta-\varepsilon)$.

Постоянные A и ε определяются из следующего условия: если подставить q_2 в уравнение (44), то оно превратится в тождество. Вычислим для этого производные от q_2:

$$\dot q_2=Ap\cos(pt+\delta-\varepsilon);\quad \ddot q_2=-Ap^2\sin(pt+\delta-\varepsilon).$$

Преобразуем правую часть уравнения (44) так, чтобы в нее входили косинус и синус такого же аргумента, что и у функции q_2. Для этого следует к фазе правой части прибавить и вычесть величину ε и раскрыть синус суммы:

$$h\sin(pt+\delta)=h\sin[(pt+\delta-\varepsilon)+\varepsilon]=$$
$$=h\sin\varepsilon\cos(pt+\delta-\varepsilon)+h\cos\varepsilon\sin(pt+\delta-\varepsilon).$$

Учитывая это, подставим значение q_2 и его производных в уравнение (44) и соберем члены при $\sin(pt+\delta-\varepsilon)$ и $\cos(pt+\delta-\varepsilon)$. Получим тождество

$$[A(k^2-p^2)-h\cos\varepsilon]\sin(pt+\delta-\varepsilon)+$$
$$+[2Anp-h\sin\varepsilon]\cos(pt+\delta-\varepsilon)\equiv 0.$$

Так как синус и косинус переменного аргумента не равны нулю одновременно, то тождество может выполняться только тогда, когда каждая из постоянных в квадратных скобках равна нулю, т. е.

$$A(k^2-p^2)=h\cos\varepsilon;\quad 2Anp=h\sin\varepsilon.$$

Из этих уравнений определяем амплитуду вынужденных колебаний A и сдвиг фаз ε:

$$A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}};\quad \sin\varepsilon=\frac{2Anp}{h};\quad \cos\varepsilon=\frac{A(k^2-p^2)}{h};\quad \operatorname{tg}\varepsilon=\frac{2np}{k^2-p^2}.$$

Из формулы для $\sin\varepsilon$ следует, что $\sin\varepsilon$ является положительной величиной. Следовательно, значения ε заключены между 0 и π. Поэтому для определения ε достаточно использовать формулу только для одной тригонометрической функции, например для $\operatorname{tg}\varepsilon$.

Окончательная форма выражения вынужденных колебаний

$$q_2=A\sin(pt+\delta-\varepsilon), \qquad (45)$$

$$A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}};\quad \operatorname{tg}\varepsilon=\frac{2np}{k^2-p^2};\quad 0\leqslant\varepsilon\leqslant\pi. \qquad (46)$$

Основные свойства вынужденных колебаний. Из (45) и (46) следуют основные свойства вынужденных колебаний при наличии линейного сопротивления. *Вынужденные колебания не затухают. Их частота совпадает с частотой возмущающей силы. Вынужденные колебания и при линейном сопротивлении не зависят от начальных условий.* Следовательно, их нельзя возбудить с помощью ненулевых начальных условий. Для возникновения вынужденных колебаний на систему должно действовать возмущение.

Амплитуда и сдвиг фаз вынужденных колебаний зависят от частот собственных и вынужденных колебаний и коэффициента затухания. Чем больше коэффициент затухания при прочих равных условиях, тем меньше амплитуда вынужденных колебаний. *Незатухающий характер вынужденных колебаний при линейном сопротивлении — главное отличие их от собственных колебаний,* которые при действии линейного сопротивления всегда затухают, сохраняя колебательный характер $(n<k)$, или затухают почти монотонно $(n\geqslant k)$.

Другая важная особенность влияния линейного сопротивления на вынужденные колебания связана с явлением резонанса. В случае резонанса при линейном сопротивлении амплитуда вынужденных колебаний не возрастает пропорционально времени, как при отсутствии сопротивления, а остается постоянной величиной. *Достаточно как угодно малого сопротивления, чтобы амплитуда вынужденных колебаний при резонансе была постоянной,* хотя, возможно, и достаточно большой, но не переменной, возрастающей с течением времени. Это свойство вынужденных колебаний хорошо подтверждается опытными данными.

Исследование вынужденных колебаний. Амплитуда и сдвиг фаз вынужденных колебаний A и ε в соответствии с (46) не зависят от начальной фазы δ возмущающей силы. При их вычислении можно считать, например, $\delta=\pi/2+\varepsilon$. Если бы возмущающая сила была постоянной, равной амплитуде H, то правая часть уравнения (44) была бы тоже постоянной и в качестве частного решения неоднородного уравнения q_2 можно взять постоянную величину статического смещения $q_2=h/k^2$. Проверка убеждает, что это значение q_2 удовлетворяет уравнению (44).

Если вычислять q_2 из (45), учитывая (46) как частный случай, соответствующий $p=0$ и $\delta=\frac{\pi}{2}+\varepsilon$, то получим $q_2=(A)_{p=p_0}=A_0=h/k^2$, что совпадает со статическим смещением. Следовательно, $A_0=h/k^2$ можно считать «амплитудой» вынужденных колебаний при действии постоянной возмущающей силы,

совпадающей по модулю с наибольшим значением гармонической возмущающей силы. Величину A/A_0 называют *коэффициентом динамичности.*

Коэффициент динамичности характеризует относительную величину амплитуды вынужденных колебаний, т. е. показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при действии гармонической возмущающей силы отличается от статического смещения, которое вызывает постоянная возмущающая сила, равная по модулю наибольшему значению гармонической силы.

Исследование показывает, что для достаточно малого сопротивления коэффициент динамичности может быть значительно больше единицы. Проведем исследование коэффициента динамичности. Найдем, когда он принимает максимальное и минимальное значения, когда стремится к нулю и т. д.

Учитывая значения A и A_0, после преобразования получаем

$$\frac{A}{A_0}=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\,\frac{1}{h/k^2}=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2+4b^2z^2}}. \qquad (47)$$

Здесь введены обозначения: $z=p/k$ — *коэффициент расстройки,* или относительная частота возмущающей силы; $b=n/k$ — *относительный коэффициент затухания.* Коэффициент динамичности зависит от параметров z и b. Исследуем его изменение в зависимости от изменения z при фиксированных значениях b.

Из (47) следует, что коэффициент динамичности стремится к нулю при $z\to\infty$ и любом относительном коэффициенте затухания b.

Следовательно, и амплитуда вынужденных колебаний A стремится к нулю, когда коэффициент k очень мал по сравнению с p $(z=p/k\to\infty)$. В этом случае *действие возмущений с большой частотой не воспринимается колеблющейся системой и не нарушает режима собственных колебаний,* которые под влиянием сопротивления для линейных систем затухают.

Это свойство вынужденных колебаний широко используется на практике при перевозке грузов, не переносящих толчков. Грузы подвешивают на таких пружинах к перевозящему их транспорту, для которых частота собственных колебаний оказалась бы малой по сравнению с частотой возмущающих сил (толчки от стыков рельсов для вагонов, толчки от неровностей дороги для автотранспорта, вибрации корпуса самолета от работающих двигателей и т. д.). На этом же свойстве вынужденных колебаний основано применение рессор у различных видов транспорта.

Для дальнейшего исследования коэффициента динамичности введем функцию $f(z)=(1-z^2)^2+4b^2z^2$, зависящую от z и параметра b. Тогда

$$A/A_0=1/\sqrt{f(z)}. \qquad (47')$$

Очевидно, что когда $f(z)$ достигает максимума, то A/A_0 имеем минимум, и наоборот. Для определения экстремальных значений $f(z)$ вычисляем ее производные по z:

$$f'(z)=-4z(1-z^2)+8b^2z=-4z(1-2b^2-z^2);$$
$$f''(z)=-4z(1-z^2)+8z^2+8b^2=8z^2-4(1-2b^2-z^2).$$

Функция $f(z)$ достигает экстремума при тех значениях z, для которых $f'(z)=0$. Из этого условия для z получаем два значения:

$$z_1=0;\quad z_2=\sqrt{1-2b^2}.$$

Так как относительная частота может быть только положительной и равна нулю для постоянной возмущающей силы, то $1-2b^2>0$; следовательно, $b<\sqrt2/2=0{,}7$. Для таких b $f''(z)<0$ при $z=z_1$, а поэтому функция $f(z)$ в этом случае достигает максимума и коэффициент динамичности — минимума. Для $z=z_2=\sqrt{1-2b^2}$, наоборот, $f''(z)>0$ и, следовательно, $f(z)$ имеет минимум, а коэффициент динамичности — максимум.

Для значений b, при которых $1-2b^2=0$ $(b=\sqrt2/2)$, имеем $z_1=z_2=0$ и $f''(z)=0$. Дополнительные исследования третьей и четвертой производных показывают, что в этом случае $f(z)$ при $z=0$ достигает минимума, а коэффициент динамичности имеет максимум. Других экстремальных значений $f(z)$ не имеет.

Если $1-2b^2<0$, то z_2 становится чисто мнимым. Это можно интерпретировать как отсутствие других значений z, кроме $z=0$, при которых $f(z)$ достигает экстремума. При $z=0$ $f(z)$ достигает минимума, а коэффициент динамичности — максимума. С увеличением z коэффициент динамичности при $1-2b^2\leqslant 0$ монотонно убывает от своего максимума при $z=0$ до нуля при $z\to\infty$.

Результаты исследования коэффициента динамичности изображены графически в виде так называемых резонансных кривых, или амплитудно-частотной характеристики системы (рис. 124, *а*), зависимости A/A_0 от z для различных значений относительного коэффициента затухания b. При этом использованы результаты исследования, полученные при отсутствии сопротивления, когда $b=0$.

Проведенное исследование позволяет сделать дополнительные выводы о влиянии линейного сопротивления на вынужденные колебания. Так, максимум коэффициента динамичности, а следовательно, и амплитуды вынужденных колебаний наступает не при резонансе, когда $z=1$ $(p=k)$, а при значении $z=z_2=\sqrt{1-2b^2}$, меньшем единицы. Чтобы получить величину максимальной амплитуды A_{max}, следует в ее выражение (47) вместо z подставить $z_2=\sqrt{1-2b^2}$, что соответствует критическому значению круговой частоты возмущающей силы

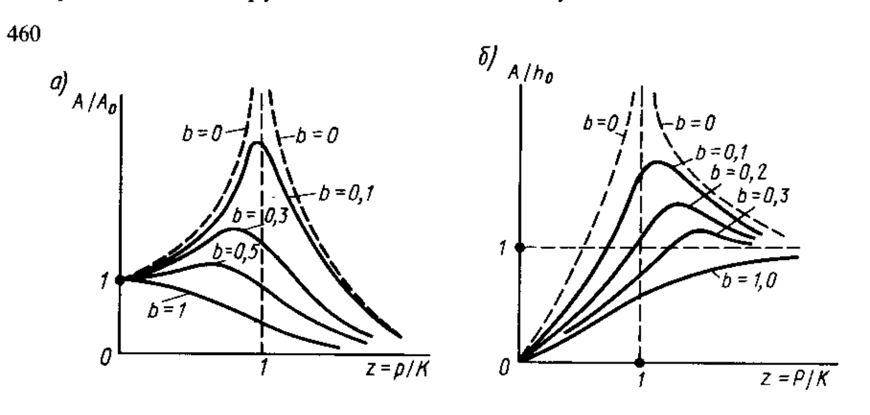

Рис. 124

$$p_{кр}=k\sqrt{1-2\frac{n^2}{k^2}}=\sqrt{k^2-2n^2}.$$

Поэтому

$$A_{max}=\frac{A_0}{\sqrt{(1-z_2^2)^2+4b^2z_2^2}}=\frac{h}{2n\sqrt{k^2-n^2}}=\frac{A_0}{2b\sqrt{1-b^2}}.$$

Для малых b по сравнению с единицей приближенно

$$A_{max}\approx A_0/(2b).$$

Амплитуда вынужденных колебаний при резонансе $A_{рез}$ получается из (47) при $z=1$:

$$A_{рез}=h/(2nk)=A_0/(2b)<A_{max},$$

т. е. *амплитуда вынужденных колебаний при резонансе меньше максимальной амплитуды,* которая достигается при $p_{кр}=\sqrt{k^2-2n^2}$. Критическая круговая частота, при которой амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума, уменьшается с увеличением коэффициента затухания. Величины A_{max} и $A_{рез}$ тоже при этом уменьшаются.

В случае кинематического возбуждения путем задания движения точек системы по гармоническому закону, как было показано, $H=H_0p^2$ и

$$h=\frac{H}{a}=\frac{H_0}{a}p^2=h_0p^2,$$

где $h_0=H_0/a$ — постоянная, не зависимая от круговой частоты возмущения p.

В этом случае по формуле (46) для амплитуды вынужденных колебаний получаем

$$A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}=h_0\frac{z^2}{\sqrt{(1-z^2)^2+4b^2z^2}}$$

и для безразмерной (относительной) амплитуды, аналога коэффициента динамичности,

$$A/h_0=z^2/\sqrt{(1-z^2)^2+4b^2z^2}.$$

Построение графиков для A/h_0 облегчается, если ввести вспомогательную переменную $z_1=\frac{1}{z}$. Зависимость A/h_0 от z_1 совпадает с зависимостью A/A_0 от z, графики для которой уже построены (рис. 124, *а*). Для перехода от z_1 к z в A/h_0 следует учесть, что $z_1=\infty$ переходит в $z=0$, $z_1=0$ в $z=\infty$ и $z_1=1$ в $z=1$.

На рис. 124, *б* приведена амплитудно-частотная характеристика системы для этого случая. Величина h_0 теперь не является статическим смещением A_0.

Исследуем влияние линейного сопротивления на сдвиг фаз. В соответствии с (46)

$$\operatorname{tg}\varepsilon=2np/(k^2-p^2)=2bz/(1-z^2),\quad 0\leqslant\varepsilon\leqslant\pi. \qquad (46')$$

Тангенс сдвига фаз ε выражается простой зависимостью от z. Пользуясь монотонностью изменения тангенса в зависимости от изменения аргумента, легко построить график зависимости ε от z при различных фиксированных значениях b. Подготовим необходимые данные, учитывая, что при отсутствии сопротивления $\varepsilon=0$ для $z<1$, $\varepsilon=\pi/2$ при $z=1$ и $\varepsilon=\pi$ при $z>1$.

Из (46′) следует, что при $z=0$ $\operatorname{tg}\varepsilon=0$. Учитывая значение ε при отсутствии сопротивления (ε монотонно и непрерывно изменяется в зависимости от b), получаем $\varepsilon=0$. При $z=1$ $\operatorname{tg}\varepsilon=\infty$ и, следовательно, $\varepsilon=\pi/2$, как и при отсутствии сопротивления. Когда $z\to\infty$, то $\operatorname{tg}\varepsilon\to 0$, что соответствует $\varepsilon\to\pi$. Если учесть дополнительно монотонность тангенса, то для ε имеем результаты:

$$z=0,\ \varepsilon=0;$$
$$0<z<1,\ 0<\varepsilon<\pi/2;$$
$$z=1,\ \varepsilon=\pi/2;$$
$$1<z<\infty,\ \pi/2<\varepsilon<\pi;$$
$$z\to\infty,\ \varepsilon\to\pi.$$

Эти данные позволяют построить график изменения сдвига фаз (фазочастотную характеристику системы) в зависимости от относительной частоты возмущающей силы для фиксированных значений относительного коэффициента затухания (рис. 125).

Тангенс сдвига фаз ε не зависит от h, и потому фазочастотная характеристика системы не зависит от способа гармонического возбуждения. Она одна и та же как для динамического, так и для кинематического возбуждений.

Проведенное исследование сдвига фаз показывает, что *сдвиг фаз при резонансе не зависит от линейного сопротивления.* Он равен $\pi/2$.

Если при частотах, близких к резонансным $(z=1)$, при отсутствии сопротивления сдвиг фаз изменяется скачкообразно, то под влиянием линейного сопротивления это изменение является непрерывным и тем более плавным, чем больше относительный коэффициент затухания.

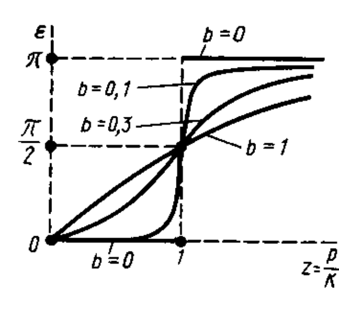

Рис. 125

Общие свойства вынужденных колебаний. Отметим основные свойства вынужденных колебаний при действии линейного сопротивления.

1. Вынужденные колебания при линейном сопротивлении являются незатухающими, т. е. амплитуда их постоянна как при отсутствии резонанса, так и при резонансе.

2. Линейное сопротивление не влияет на частоту вынужденных колебаний, которая совпадает с частотой возмущающей силы.

3. Вынужденные колебания при линейном сопротивлении не зависят от начальных условий, так же как они не зависят от них при отсутствии сопротивления.

4. Амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю быстрее при линейном сопротивлении с увеличением относительной частоты возмущающей силы, чем при отсутствии сопротивления.

Основы виброзащиты. Во многих случаях от работы машин, механизмов и других устройств, представляющих собой колеблющиеся системы, передаются вредные вибрации на фундаменты. Защищать фундаменты и иные крепления колеблющихся систем следует прежде всего от вынужденных колебаний, так как собственные колебания при наличии сопротивления быстро затухают.

Для уменьшения переменных сил, передающихся от колеблющихся систем на фундаменты, представляющие собой упругие основания, применяются различные способы. Силы от колеблющихся систем с одной степенью свободы, пропорциональные ускорениям, пропорциональны амплитудам колебаний.

Существует два основных способа уменьшения амплитуды вынужденных колебаний. Один из них состоит в значительном разносе частот вынужденных и собственных колебаний системы, что имеет место при больших значениях $z=p/k$. Другой способ связан с увеличением коэффициента сопротивления, что достигается с помощью специальных устройств, называемых демпферами. Процесс уменьшения амплитуды колебаний за счет увеличения коэффициента сопротивления называют демпфированием колебаний.

Для выяснения особенностей, связанных с демпфированием вынужденных колебаний, рассмотрим пример.

Пример. Имеем колеблющуюся систему с одной степенью свободы, совершающую колебания в вертикальном направлении под действием возмущающей силы $Q^B=H\sin(pt+\delta)$, действующей в том же направлении (рис. 126).

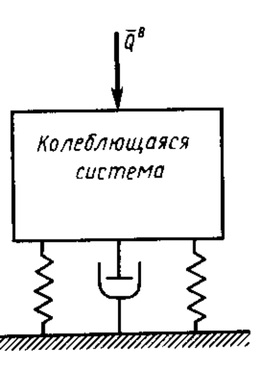

Рис. 126

Корпус колеблющейся системы укреплен на фундаменте с помощью пружин с суммарной жесткостью c и демпфера с коэффициентом сопротивления μ.

Определить наибольшую силу, передающуюся на фундамент вследствие вынужденных колебаний системы.

Решение. Выберем за обобщенную координату q перемещение корпуса колеблющейся системы по вертикали вниз, отсчитываемое от положения статического равновесия. На фундамент через пружины и демпфер будет передаваться сила

$$F=cq_2+\mu\dot q_2,$$

где

$$q_2=A\sin(pt+\delta-\varepsilon)$$

— вынужденные колебания системы, возникающие под действием возмущающей силы.

Так как $\dot q_2=Ap\cos(pt+\delta-\varepsilon)$, то

$$F=Ac\left[\sin(pt+\delta-\varepsilon)+\frac{\mu p}{c}\cos(pt+\delta-\varepsilon)\right]=Ac\sqrt{1+\left(\frac{\mu p}{c}\right)^2}\sin(pt+\delta-\varepsilon+\gamma),$$

где γ — дополнительная начальная фаза. Таким образом,

$$F_{max}=Ac\sqrt{1+\frac{\mu^2p^2}{c^2}}.$$

Величину отношения $\frac{F_{max}}{Q^B_{max}}=\frac{F_{max}}{H}=\frac{Ac}{H}\sqrt{1+\frac{\mu^2p^2}{c^2}}$ называют *коэффициентом передачи силы.* Преобразуем его выражение, используя формулы

$$h=\frac{H}{a},\ k^2=\frac{c}{a},\ A_0=\frac{h}{k^2},\ 2n=\frac{\mu}{a}.$$

Тогда $Ac=\frac{A}{A_0}A_0c$; $A_0c=\frac{h}{k^2}c=\frac{H}{a}\,\frac{c}{k^2}=H$.

Для максимальной силы имеем

$$F_{max}=\frac{A}{A_0}H\sqrt{1+\frac{4n^2a^2p^2}{c^2}}=\frac{A}{A_0}H\sqrt{1+4b^2z^2},\qquad где\ z=p/k,\ b=n/k.$$

Для коэффициента передачи силы F_{max}/H, используя выражение для коэффициента динамичности A/A_0 (47), получаем

$$F_{max}/H=\sqrt{1+4b^2z^2}/\sqrt{(1-z^2)^2+4b^2z^2}. \qquad (а)$$

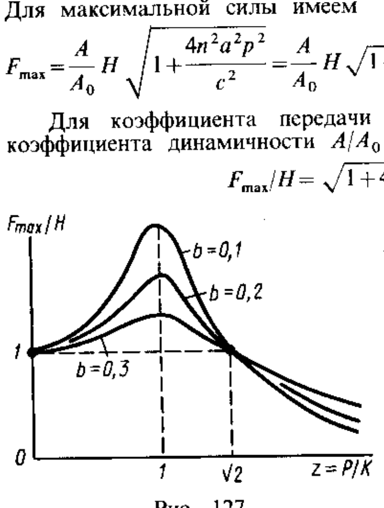

Рис. 127

Из (а) следует, что $F_{max}/H=1$ при $z=0$ и $z=\sqrt2$. С учетом этого на рис. 127 приведены графики коэффициента передачи силы в зависимости от z и b. Из графиков следует, что F_{max}/H убывает с ростом b при изменении z в интервале $0<z<\sqrt2$. Здесь демпфирование эффективно. Коэффициент передачи силы растет при изменении z в пределах $\sqrt2<z<\infty$. В этом интервале изменения z демпфирование не эффективно, так как оно приводит не к уменьшению, а к увеличению коэффициента передачи силы.